Dozent: Dr. Martin Friesen

Tutor: Dennis Schroers

Finanzmathematik
Wintersemester 2018 / 2019

Blatt 5

- Abgabe bis **Donnerstag 06.12.2018 um 12:00.**
- Abgabe ins Postfach 89 auf Ebene D13.

Aufgabe 1. (6 Punkte)
Betrachte ein arbitragefreies EPM. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Ist V replizierbar durch ein Portfolio, so gilt für jedes risikoneutrale Maß $\mathbb{Q}$

$$\pi(V) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\frac{V}{1+r}\right).$$

(b) Seien $V_1, \dots, V_n$ replizierbar durch ein Portfolio und $\alpha_1, \dots, \alpha_d \in \mathbb{R}$. Dann ist auch $V = \sum_{k=1}^n \alpha_k V_k$ replizierbar durch ein Portfolio und es gilt

$$\pi(V) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \pi(V_k).$$

(b) Seien $V_1, \dots, V_n$ replizierbar durch ein Portfolio mit $\pi(V_1), \dots, \pi(V_n) \neq 0$. Seien $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ mit $\sum_{k=1}^n \alpha_k \pi(V_k) \neq 0$. Sei $V = \sum_{k=1}^n \alpha_k V_k$, dann gilt

$$R(V) = \sum_{k=1}^{n} \beta_k R(V_k), \quad \text{wo} \quad \beta_k = \frac{\alpha_k \pi(V_k)}{\pi(V)}$$

Aufgabe 2. (6 Punkte)
Betrachte das EPM mit $d = 1$, $\pi_0 = 1$, $\pi_1 > 0$, $r > -1$, $\Omega = \{+1, -1\}$, $p(+1) = p \in (0,1)$, $p(-1) = 1 - p$ sowie

$$S_1(\omega) = \begin{cases} \pi_1 a_+, & \omega = +1, \\ \pi_1 a_0, & \omega = -1 \end{cases}, \quad \text{wo} \quad 0 < a_- \leq 1 \leq a_+.$$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Falls $a_- \neq a_+$, so ist jede Zufallsvariable $V : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ replizierbar durch ein Portfolio.

(b) Welche V lassen sich im Fall $a_- = a_+$ durch ein Portfolio replizieren?

(c) Es gelte $0 < a_- < 1 + r < a_+$, d.h. der Markt ist arbitragefrei. Bestimmen Sie den Preis $\pi(V)$ sowie die Rendite $R(V)$.

Aufgabe 3. (4 Punkte)
Betrachte das gleiche Model wie in Aufgabe 2 mit $0 < a_- < 1 + r < a_+$.

(a) Sei C_{put} die Auszahlungsfunktion von einem europäischen Put mit Strike $K > 0$ und underlying S_1. Bestimmen Sie den Arbitragepreis $\pi(C_{put})$ sowie die Rendite $R(C_{put})$.

(b) Sei C_{call} die Auszahlungsfunktion von einem europäischen Call mit Strike $K > 0$ und underlying S_1. Bestimmen Sie den Arbitragepreis $\pi(C_{call})$ sowie die Rendite $R(C_{call})$.

Aufgabe 4. (4 Punkte)
Anleger Max möchte an dem Finanzmarkt aus Aufgabe 2 investieren. Der Zinssatz ist im bekannt als $r = 0.01$. Er kauft 150 Einheiten vom risky asset zu einem Preis von 75 Euro. Aus Sorge vor Kursverlusten möchte er sich durch den Kauf einer europäischen Put Option mit Strike $K = 75$ Euro absichern. Es gelte $0 < a_- < 1 + r < a_+$. Bei welcher Preisobergrenze zum Zeitpunkt $t = 0$ sollte Max die Put Option kaufen?